Zápočtový test z MA2, varianta A **4. 1. 2018**

1. Vhodným způsobem integrace spočítejte integrál

$$\iint_E xy \, \mathrm{d}S,$$

kde

$$E: \quad y \geq 0 \ \ \& \ \ x^2 + y^2 \leq 2x$$

Oblast E načrtněte.

Řešení:
Oblast je horní polovina kruhu o poloměru 1 se středem v bodě $(1, 0)$, protože druhá nerovnost je po doplnění na čtverec ekvivalentní podmínce $(x-1)^2+y^2 \leq 1$. Bude tedy vhodné použít polární souřadnice, s případným posunutým středem.

Pomocí "standardních"polárních souřadnic:
Oblast E parametrizujeme pomoci

$$\Phi: \quad x = \varrho \cos\varphi, \quad y = \varrho \sin\varphi \ .$$

Po dosazení do nerovnosti máme

$$\varrho \sin\varphi \geq 0, \quad \varrho^2 \leq 2\varrho\cos\varphi$$

tedy pro $\varrho > 0$ musí být $\varrho \leq 2\cos\varphi$ a $\sin\varphi \geq 0$ a speciálně $\cos\varphi \geq 0$. Oblast parametrizace U tak bude

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \leq \varrho \leq 2\cos\varphi \ .$$

Takže dostáváme

$$\iint_{E=\Phi(U)} xy \, \mathrm{d}S = \iint_U \varrho^2 \cos\varphi \sin\varphi \cdot \varrho \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\varphi} \varrho^3 \cos\varphi \sin\varphi \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_{\varrho=0}^{\varrho=2\cos\varphi} \cos\varphi \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi = 4\Big[-\frac{\cos^6\varphi}{6}\Big]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \ .$$

Pomocí "posunutých"polárních souřadnic:
Půlkruh E parametrizujeme pomocí

$$\Psi: \quad x - 1 = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho \sin\varphi$$

a oblastí parametrizace

$$V: \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad \& \quad 0 \leq \varrho \leq 1 \ .$$

Jakobián zůstává stejný jako u obvyklých polárních souřadnic, tj. $\det \Psi' = \varrho$. Takže dostáváme

$$\iint_{E=\Psi(V)} xy \, \mathrm{d}S = \iint_V (1 + \varrho\cos\varphi)\varrho\sin\varphi \cdot \varrho \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi} \int_0^1 \varrho^2 \sin\varphi + \varrho^3 \underbrace{\cos\varphi\sin\varphi}_{\frac{\sin 2\varphi}{2}} \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^1 \varrho^2 \, d\varrho\right)}_{\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^\pi \sin\varphi \, d\varphi\right)}_{2} + \left(\int_0^1 \varrho^3 \, d\varrho\right) \cdot \underbrace{\left(\int_0^\pi \frac{\sin 2\varphi}{2} \, d\varphi\right)}_{0} = \frac{2}{3} \, .$$

Pomocí Fubiniho věty (tj. postupné integrování):
Množinu E si nařeženeme svisle:

$$E: \quad 0 \le x \le 2 \;\; \& \;\; 0 \le y \le \sqrt{2x - x^2}$$

a pak máme

$$\iint_E xy \; \mathrm{d}S = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy \; \mathrm{d}y \; \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^2 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{2x-x^2}} \mathrm{d}x = \int_0^2 x^2 - \tfrac{x^3}{2} \; \mathrm{d}x = \left[\tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{8}\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3} \, .$$

2. Spočítejte objem tělesa

$$A: \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 2 \;\; \& \;\; x^2 + y^2 \le 1 \, .$$

Těleso A načrtněte.

Řešení:
Těleso A je průnik koule o poloměru $\sqrt{2}$ a válce o průměru 1, jehož osa prochází středem koule. Použijeme proto cylindrické souřadnice:

$$\Phi: \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \qquad z = h \, .$$

Po dosazení do nerovnosti máme

$$r^2 + h^2 \le 2, \quad r^2 \le 1$$

Oblast parametrizace U tak bude

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad -\sqrt{2 - r^2} \le h \le \sqrt{2 - r^2} \, .$$

Pak dostáváme

$$\textit{objem } A = \iiint_{A=\Phi(U)} 1 \; \mathrm{d}V = \iiint_U r \; \mathrm{d}h \; \mathrm{d}r \; \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{2-r^2}}^{\sqrt{2-r^2}} r \; \mathrm{d}h \; \mathrm{d}r \; \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r\sqrt{2 - r^2} \; \mathrm{d}r \; \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left[-\tfrac{2}{3}(2 - r^2)^{3/2}\right]_{r=0}^{r=1} \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \tfrac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) \; \mathrm{d}\varphi = \tfrac{4\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1) \, .$$

Výpočet pomocí sférických souřadnic (těžší):
Zjednodušíme se to tím, že těleso je symetrické podle roviny $z = 0$, takže si spočítáme jen objem části A' nad touto rovinou:

$$\Psi: \quad x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta\ .$$

Po dosazení do nerovností máme

$$0 \le z = r\cos\vartheta, \quad r^2 \le 2, \quad r^2\sin^2\vartheta \le 1$$

speciálně $0 \le r \le \min\{\sqrt{2}, \frac{1}{\sin\vartheta}\}$. Z toho dostáváme (i podle náčrtu) oblast parametrizace jako

$$V: 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \text{a} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \le r \le \sqrt{2} \quad \text{pro} \quad \vartheta \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle \\ 0 \le r \le \frac{1}{\sin\vartheta} \ \text{pro} \quad \vartheta \in \langle \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\rangle \end{array} \right.$$

Pak dostáváme

$$\textit{objem } A' = \iiint\limits_{A'=\Psi(V)} 1 \ \mathrm{d}V = \iiint\limits_{V} r^2\sin\vartheta \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\vartheta \ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2}} r^2\sin\vartheta \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\vartheta \ \mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{\sin\vartheta}} r^2\sin\vartheta \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\vartheta \ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sqrt{2}}{3}\sin\vartheta \ \mathrm{d}\vartheta \ \mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3\sin^3\vartheta}\sin\vartheta \ \mathrm{d}\vartheta \ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2\sqrt{2}}{3}\Big[-\cos\vartheta\Big]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{4}} \ \mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\Big[-\operatorname{cotg}\vartheta\Big]_{\vartheta=\frac{\pi}{4}}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{3}\cdot 1 \ \mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

Celkem tedy

$$\textit{objem } A = 2 \cdot \textit{objem } A' = \frac{4\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)\ .$$